Математичка гимназија у Београду
Београд, Краљице Наталије 37

Матурски рад из математике
Област: Геометрија

Тема:
Хиперболичка геометрија

Ментор:
мр Миљан Кнежевић
Математички факултет
Београд

Ученик:
Димитрије Шпадијер IV_a
Математичка гимназија
Београд

Београд
јун 2011.

САДРЖАЈ

УВОД У ГЕОМЕТРИЈУ

Геометријом су се људи бавили још у најранијој историји. У почетку је то било уочавање карактеристичних облика, као што су круг или квадрат, а касније откривају и разне особине тих фигура. Ова открића користила су се при мерењу површине земљишта, па отуд геометрија и добија своје име. До геометријских тврђења се у почетку долазило индуктивно - мерењем на појединачним примерима и каснијом провером добијених резултата. Први математички закони, које су познавали још стари Египћани и Вавилонци, добијени су управо овим, индуктивним методима и прихватани су без доказа.

Већ код старих Грка појавило се начело према коме се математичке законитости нису прихватале унапред док се претходно не докажу. Напуштен је индуктивни, а започет дедуктивни метод, који је у даљем развоју геометрије, математике, а и осталих наука имао непроцењив значај. Прва примена дедуктивног метода у геометрији и први геометријски докази везују се за старогрчког филозофа Талеса из Милета (VII-VI в. п.н.е). Талес је путовао у Египат и тамо од свештеника сазнао њихове геометријске и астрономске закључке о збиру углова у троуглу, о описаном кругу троугла итд. Овакав начин развоја геометрије наставили су и други старогрчки филозофи, нпр. Питагора са острва Самоса (VI в. п.н.е). Питагора и његови ученици заслужни су за доказивање Питагорине теореме и откривање несамерљивих дужи, тј. ирационалних бројева. Поред тога, открили су и да је збир углова у троуглу једнак 180° и први, трећи и четврти став подударности троугла. Питагорин следбеник, Хипократ Хионски (V в. п.н.е) изложио је систематски геометрију и израчунао површину месечевог српа.

Платон и Аристотел (IV в. п.н.е) придавали су веома велики значај развоју геометрије. Платон је за своје следбенике основао школу „Академија“, а пошто је геометрију сматрао основом свих наука, на улазу у Академију био је уклесан натпис „Нека не улази онај ко не зна геометрију“. Платон је захтевао да се при извођењу геометријских правила не служи само искуственим доказима, већ да се полазећи од раније усвојених и доказаних претпоставки та правила доказују. Поменимо да се потреба за доказима појавила још 2000 година п.н.е, када су Индијци покушавали да изведу геометријска правила. Међутим, код Индијаца доказати нешто значило је запазити да то важи на основу очигледности цртежа. Цртежи у геометрији могу имати помоћну улогу, али њихова тачност мора бити логички проверена.

Стари Грци су очигледност цртежа сматрали недовољним за доказ неке нове геометријске чињенице, па ју је требало добити расуђивањем по одређеним логичким законима из непобитних истина. Аристотел је разрадио логику доказивања и по његовом мишљењу у темељима геометрије морају се налазити аксиоме, чија истинитост не изазива сумњу и чији је број ограничен. Аксиома у дословном преводу са грчког значи „непобитно“ и не треба је доказивати. Све остале геометријске претпоставке се убрајају међу теореме (теорема значи појам, представа у дословном преводу са грчког), а оне се доказују. По Аристотелу доказати неку теорему значи добити је путем логичког расуђивања као последицу раније доказаног. Свој метод заснован на преласку од општег ка појединачном назива дедуктивном методом, а од геометрије ствара дедуктивну математичку дисциплину, каква је она и данас.

СИСТЕМАТИЗАЦИЈА ГЕОМЕТРИЈЕ. ЕУКЛИД И ЊЕГОВИ „ЕЛЕМЕНТИ“

Када се појавила потреба да се доказане теореме систематизују и уведу аксиоме, први покушај у томе дао је Еуклид из Александрије (III в. п.н.е) у свом веома познатом делу „Елементи“ од 13 књига. У Еуклидово време није сматран образованим онај ко није познавао геометрију. Постоји легенда да је сам цар тражио од Еуклида да га уведе у знања геометрије, али тако да не оптерећује мозак са свих тринаест књига „Елемената“, већ да се за њега пронађе краћи, „царски пут“ у изучавању геометрије. Смели старац му је одговорио да нажалост у науци нема „царских путева“, и да уколико цар жели да научи геометрију мора да прође цео дуги пут.

У првој књизи „Елемената“ Еуклид даје 23 дефиниције којима уводи основне геометријске појмове као што су тачка, права, раван, угао, круг итд. Ово су те дефиниције:

1. Тачка је оно што нема делова.
2. Линија је дужина без ширине.
3. Крајеви линије су тачке.
4. Права је линија она, која за тачке на њој подједнако лежи.
5. Површина је оно што има само дужину и ширину.
6. Крајеви површине су линије.
7. Раван је површина која за праве на њој подједнако лежи.
8. Угао у равни је узајамни нагиб двеју линија у равни које се секу и које не леже на истој правој.
9. Ако су линије које образују угао праве, угао се зове праволинијски.
10. Ако права, која стоји на другој правој, образује са овом два суседна једнака угла, савки од њих је прав, а подигнута права зове се нормала на оној на којој стоји.
11. Туп угао је онај који је већи од правог.
12. Оштар угао је онај који је мањи од правог.
13. Граница је оно што је крај ма чега.
14. Фигура је оно што је омеђено или једном или са више граница.
15. Круг је равна фигура омеђена таквом јединoм линијом (која се зове периферија), да су све праве повучене од једне тачке, која се налази у самој фигури, према тој линији (према периферији круга) међусобно једнаке.
16. Ова тачка зове се средиште круга.
17. Пречник круга је свака права што пролази кроз средиште круга а ограничена је са сваке стране периферијом круга; он полови круг.
18. Полукруг је фигура ограничена пречником и њиме одвојеном периферијом круга; средиште полукруга је исто као и средиште круга.
19. Праволинијске фигуре су оне које су ограничене правама; тростране су ограничене са три, четворостране са четири, многостране са више од четири праве.
20. Од тространих фигура једнакостранi троугао има три једнаке стране, једнакокраки има само две једнаке стране, а разнострани има три неједнаке стране.
21. Даље, од тространих фигура је правоугли троугао онај који има прав угао, тупоугли онај који има туп угао, а оштроугли који има три оштра угла.
22. Од четвоространих фигура квадрат је једнакостран и са правим угловима, правоугаоник је са правим угловима, но није са једнаким странама, ромб са

једнаким странама, но није са правим угловима, ромбоид са једнаким наспрамним странама, но није једнакостран ни са правим угловима. Остале четворостане фигуре нека се зову трапези.

23. Паралелне су оне праве које се налазе у истој равни и које се, продужене у бескрајност на обе стране, не секу једна са другом.

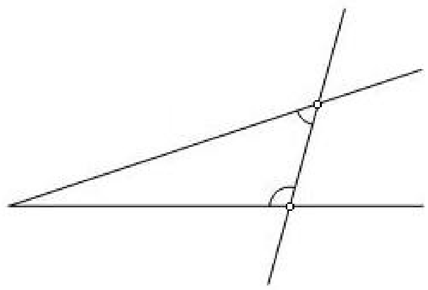
Основне ставове у геометрији Еуклид је поделио на аксиоме и постулате, и то на 9 аксиома и 5 постулата.

Аксиоме су:

1. Они објекти који су једнаки истом објекту једнаки су међусобно.
2. И ако се једнаким објектима додају једнаки објекти целине су једнаке.
3. И ако се од једнаких објеката одузму једнаки објекти остаци су једнаки.
4. И ако се неједнаким објектима додају једнаки објекти целине су неједнаке.
5. И удвостручени једнаки објекти једнаки су међусобно.
6. И половине од једнаких објеката једнаке су међусобно.
7. И они геометријски објекти који се могу поклопити једнаки су међусобно.
8. И целина је већа од дела.
9. И две праве не ограничавају област.

А постулати су:

1. Претпоставља се да је могуће од сваке тачке до сваке друге тачке повући праву линију.
2. Претпоставља се и да ограничена права може бити продужена у свом правцу непрекидно.
3. Претпоставља се и да се може описати око сваког средишта сваким растојањем круг.
4. Претпоставља се и да су сви прави углови једнаки међусобно.
5. Претпоставља се и да ће се, ако једна права у пресеку с другим двема образује са исте стране два унутрашња угла чији је збир мањи од збира два права угла, те две праве, бескрајно продужене, сећи и то са оне стране са које је тај збир мањи од збира два права угла.



ПЕТИ ЕУКЛИДОВ ПОСТУЛАТ И ОТКРИЋЕ ХИПЕРБОЛИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Еуклидова оштроумна способност понирања у природу геометрије уверила га је да тај постулат није био, у његово време, изведен из других постулата. Како није био у стању да сам изведе постулат из својих осталих претпоставки, а како је желео да га искористи за доказивање многих од својих теорема, Еуклид је то поштено истакао уз остале своје постулате. Због сложености у исказу и у значењу, многи математичари су мислили да је Пети Еуклидов постулат теорема, тј. да се из осталих аксиома и постулата може доказати. Све до XIX века овај проблем није био решен. У многим покушајима да се Пети постулат докаже, коришћена су нека тврђења чији је доказ изостављен, а за која се испоставило да се не могу доказати из осталих аксиома и постулата, ако се изостави Пети постулат. Како из њих следи Пети постулат, а и она следе из Петог постулата, та тврђења зову се еквиваленти Петог Еуклидовог постулата. Неки од њих су:

1. Ако је $ABCD$ четвороугао код кога су углови при ивици BC прави, а ивице AB и CD подударне тада су и углови код друга два темена такође прави. (Ђ. Ђ. Сакери 1667-1733, италијански математичар)
2. Права нормална на један крак оштрог угла сече други крак.
3. Око сваког троугла се може описати круг.
4. Ако су код неког четвороугла три угла права тада је и четврти угао прав. (Ј. Х. Ламберт 1728-1777, француски математичар)
5. Збир углова у троуглу једнак је опруженом углу. (А. М. Лежандр 1752-1833, француски математичар)
6. За сваку праву и тачку ван ње у равни њима одређеној постоји највише једна права која садржи ту тачку и дисјунктна је с том правом. (Џ. Плејфер 1748-1819, енглески математичар)

Следећи преломни тренутак у развоју геометрије био је појава нееуклидских геометрија у XIX веку. Њихово откриће везује се за руског математичара Николаја Ивановича Лобачевског (1792-1856). Он је кренуо од негације Петог постулата, тј. њему еквивалентног Плејферовог тврђења, претпоставивши да се кроз тачку ван неке праве могу повући барем две праве које су с њом дисјунктне и припадају оној равни коју одређују та права и та тачка. У жељи да дође до контрадикције, Лобачевски је открио многа нова тврђења која нису у контрадикцији са осталим аксиомама и постулатима, ако се избаци Пети постулат. То откриће навело га је на идеју да осим еуклидске геометрије постоји потпуно нова геометрија која је непротивречна, а која се базира на Еуклидовим аксиомама и постулатима, где је Пети постулат замењен његовом негацијом. По њему се та геометрија данас зове геометрија Лобачевског. До истог открића, независно од Лобачевског, дошао је и мађарски математичар Јанош Бољај (1802-1860), а потпуну потврду о непротивречности ове геометрије дао је француски математичар Анри Поенкаре (1854-1912) изградивши модел на основу којег је показао да би противречност те геометрије значила и противречност еуклидске геометрије.

Иако се може учинити чудним да се у математици паралелно изучавају еуклидска геометрија и геометрија Лобачевског, најважније је да су обе геометрије изграђене на систему аксиома који су потпуни и непротивречни. На питање која од те две геометрије важи не треба тражити одговор у оквиру математике, јер би се то свело на питање које аксиоме важе, на које није могуће дати одговор, јер аксиоме прихватамо без доказа. Међутим, могуће је дати одговор на питање каква је геометрија физичког простора. Ако праву интерпретирамо као светлосни зрак, долазимо до тога да физички простор није еуклидски, нити је одређен геометријом Лобачевског. Појавом Ајнштајнове теорије релативности (Алберт Ајнштајн, 1879-1955, немачки физичар) показано је да је у космичком простору повољно користити нееуклидску геометрију са променљивом закривљеношћу, тј. може се рећи да се геометрија свемира локално мења у зависности од присуства великих маса.

Геометрија Лобачевског и еуклидска геоматрија имају много тога заједничког. Аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности заједничке су за обе геометрије, а главна разлика је у аксиоми паралелности, јер у еуклидској геометрији важи Плејферова аксиома, док у геометрији Лобачевског важи аксиома Лобачевског, а оне искључују једна другу. Према томе, у зависности од тога коју аксиому одаберемо, бавићемо се једном од те две геометрије. Ако не одаберемо ниједну, тј. користимо само прве 4 групе аксиома, тада је то апсолутна геометрија.

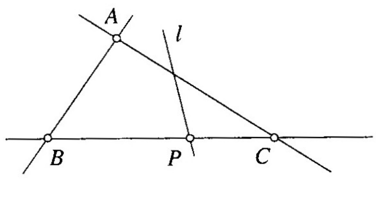
СИСТЕМ АКСИОМА АПСОЛУТНЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

I Аксиоме инциденције

1. За сваке две тачке постоји бар једна права која их садржи.
2. За сваке две разне тачке постоји тачно једна права која их садржи.
3. Свака права садржи бар две разне тачке.
4. За сваке три тачке постоји бар једна раван која их садржи.
5. За сваке три неколинеарне тачке постоји тачно једна раван која их садржи.
6. Свака раван садржи бар три неколинеарне тачке.
7. Ако две разне тачке неке праве припадају некој равни тада и све тачке те праве припадају тој равни.
8. Ако две равни имају једну заједничку тачку, тада оне имају бар још једну заједничку тачку.
9. Постоје четири некомпланарне тачке.

II Аксиоме распореда

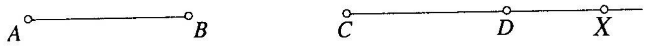
1. Ако је $\beta(A,B,C)$ тада су A, B и C три разне колинеарне тачке.
2. Ако је $\beta(A,B,C)$ тада је и $\beta(C,B,A)$.
3. Ако је $\beta(A,B,C)$ тада није $\beta(A,C,B)$.
4. За сваке две тачке A и B на правој AB постоји тачка C таква да је $\beta(A,B,C)$.
5. Ако су A, B и C три разне колинеарне тачке тада важи бар једна од релација $\beta(A,B,C)$, $\beta(A,C,B)$, $\beta(C,A,B)$.
6. (Пашова аксиома) Ако су A, B и C три неколинеарне тачке и l права равни ABC која не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $\beta(B,P,C)$, тада права l сече или праву AC у тачки Q таквој да је $\beta(A,Q,C)$ или праву AB у тачки R таквој да је $\beta(A,R,B)$.



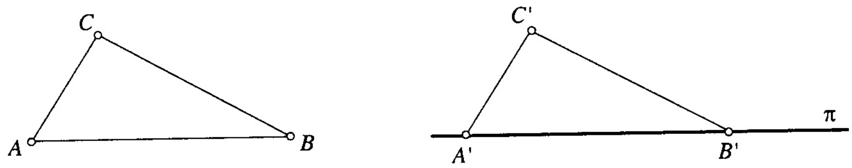
III Аксиоме подударности

1. Ако је $(A,B)\cong(C,D)$ и A=B, тада је и C=D.
2. За сваке две тачке A и B је $(A,B)\cong(B,A)$.
3. Ако је $(A,B)\cong(C,D)$ и $(A,B)\cong(E,F)$ тада је и $(C,D)\cong(E,F)$.
4. Ако су C и C' тачке отворених дужи AB и $A'B'$, такве да је $(A,C)\cong(A',C')$ и $(B,C)\cong(B',C')$, тада је и $(A,B)\cong(A',B')$.

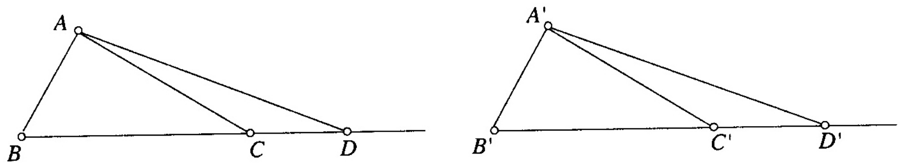
5. Ако су A и B две тачке и CX полуправа тада на тој полуправој постоји тачка D таква да је $(A,B) \cong (C,D)$.



6. Ако су A, B и C три неколинеарне тачке и $A'B'$ тачке руба неке полуравни π, такве да је $(A,B) \cong (A',B')$, тада у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A,C) \cong (A',C')$ и $(B,C) \cong (B',C')$.

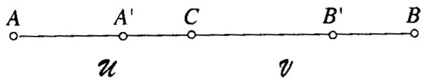


7. Ако су A, B, C и A',B',C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$ такве да је $(A,B) \cong (A',B')$, $(B,C) \cong (B',C')$, $(A,C) \cong (A',C')$ и $(B,D) \cong (B',D')$, тада је и $(A,D) \cong (A',D')$.



IV Аксиома непрекидности

1. (Дедекиндова аксиома) Нека је отворена дуж AB разложена на унију два дисјунктна непразна подскупа M и N. Ако ниједна тачка из скупа M није између неке две тачке скупа N и ниједна тачка скупа N није између неке две тачке скупа M, тада постоји јединствена тачка C отворене дужи AB таква да је $\beta(A',C,B')$ за свако $A' \in M \setminus \{C\}$ и свако $B' \in N \setminus \{C\}$.



У неким литературама наводе се две аксиоме непрекидности. То су:

1. (Архимедова аксиома) Ако су AB и CD две произвољне дужи, тада на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, ..., A_n$ таквих да је $\beta(A_1, A_2, ..., A_n)$, при чему је свака од дужи $AA_1, A_1A_2, ..., A_{n-1}A_n$ подударна дужи CD и $\beta(A,B,A_n)$.
2. (Канторова аксиома) Ако је $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ...$ низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тог низа.

Из Архимедове и Канторове аксиоме изводи се Дедекиндова, а из Дедекиндове се изводе Архимедова и Канторова, те су Архимедова и Канторова аксиома заједно еквивалентне Дедекиндовој. Такође, Архимедова и Канторова аксиома постоје као слична тврђења и у скупу реалних бројева, тако да је помоћу њих могуће увести бијективно пресликавање произвољне праве на скуп реалних бројева.

Ако се на овај систем аксиома дода Плејферов еквивалент Петог Еуклидовог постулата, добија се еуклидска геометрија, а ако се дода аксиома Лобачевског, добија се хиперболичка геометрија. Хиперболичка геометрија често се зове и именом Лобачевског, тј. геометријом Лобачевског, а понекад геометријом Бољај-Лобачевског.

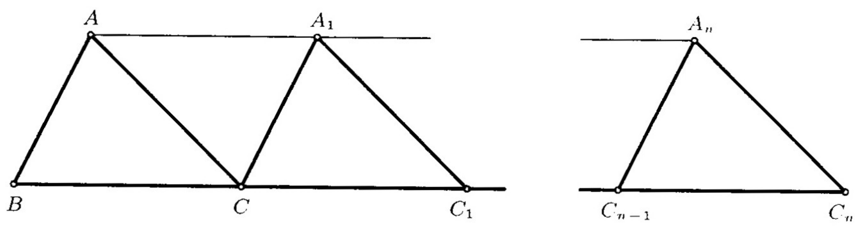
ОСНОВНИ ПОЈМОВИ И СТАВОВИ ГЕОМЕТРИЈЕ ЛОБАЧЕВСКОГ

Аксиома VL: За сваку тачку B и праву a која је не садржи у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже B, а са a немају заједничких тачака.

Француски математичар Лежандр у својим Елементима геометрије доказао је важне теореме везане за збир унутрашњих углова троугла. Наводимо 4 његове теореме, као и доказ за прву од њих.

1. Збир унутрашњих углова било којег троугла није већи од $180°$.
2. Ако постоји троугао коме је збир унутрашњих углова $180°$, онда је збир унутрашњих углова сваког троугла такође $180°$.
3. Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова $180°$ ако и само ако свака права управна на једном краку било којег оштрог угла сече други крак тог угла.
4. Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова $180°$ ако и само ако за сваку тачку B и праву a која је не садржи, у њима одређеној равни постоји јединствена права b, која садржи B и са a нема заједничких тачака.

Доказ: Претпоставимо супротно, тј. да постоји троугао ABC коме је збир унутрашњих углова већи од $180°$. Обележимо са $C_1, C_2, ..., C_n$ тачке полуправе BC такве да је $\beta(B, C, C_1, C_2, ..., C_n)$ и $BC \cong CC_1 \cong C_1C_2 \cong ... \cong C_{n-1}C_n$, а са $A_1, A_2, ..., A_n$ тачке с оне стране праве BC са које је тачка A, такве да је $\Delta ABC \cong \Delta A_1CC_1 \cong \Delta A_2C_1C_2 \cong ... \cong \Delta A_{n-1}C_{n-1}C_n$.

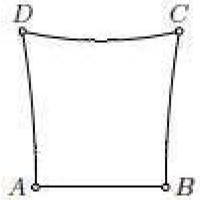


Тада је, на основу првог става о подударности троуглова (они важе у апсолутној геометрији), $\Delta ACA_1 \cong \Delta A_1C_1A_2 \cong ... \cong \Delta A_{n-1}C_{n-1}A_n$, па је $AA_1 \cong A_1A_2 \cong ... \cong A_{n-1}A_n$. Такође, како је $180° = \angle BCC_1 = \angle BCA + \angle ACA_1 + \angle A_1CC_1 = \angle BCA + \angle ACA_1 + \angle ABC$, јер из $\Delta ABC \cong \Delta ACC_1$ следи $\angle ABC = \angle A_1CC_1$, из претпоставке да је збир углова у троуглу ABC већи од $180°$ важи да је $\angle BAC > \angle ACA_1$, па из неједнакости троугла важи $BC > AA_1$. Како је $BA + nAA_1 + AC = BA + AA_1 + ... + A_{n-1}A_n + A_nC_n > BC_n = (n+1)BC$, за сваки природан број n биће $n(BC - AA_1) < BA + AC - BC$, а то је у контрадикцији с Архимедовом аксиомом пошто је $BC - AA_1 > 0$.Према томе, претпоставка да је збир углова у троуглу већи од $180°$ није добра, те је збир углова у троуглу мањи или једнак $180°$.

Из Лежандрових теорема видимо да не мора бити збир углова у троуглу једнак $180°$, али од тога не може бити већи. Зато је тврђење да је збир углова баш једнак $180°$ еквивалентан Петом Еуклидовом послтулату, тј. Плејферовој аксиоми, која се користи у данашњем заснивању еуклидске геометрије. Како у геометрији Лобачевског ово не важи, то је збир углова у сваком троуглу у њој мањи од $180°$. Такође, како не важи ни други еквивалент Петог Еуклидовог постулата, права управна на краку оштрог угла не мора сећи други крак. Према томе, следећих 6 тврђења су еквиваленти аксиоме Лобачевског:

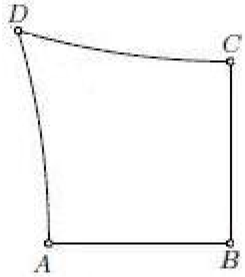
1. Угао паралелности је оштар.
2. Збир унутрашњих углова сваког троугла мањи је од $180°$.
3. Збир унутрашњих углова сваког простог, равног четвороугла мањи је од $360°$.
4. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су оштри.
5. Један угао Ламбертовог четвороугла је оштар.
6. Постоји права у равни оштрог угла која је управна на једном краку тог угла, а не сече његов други крак.

Дефиниција: Сакеријев четвороугао је онај четвороугао којем су углови налегли на једној ивици, која се зове основица, прави, а ивице суседне тој ивици подударне. Преостала ивица зове се противосновица Сакеријевог четвороугла.



Другим речима, четвороугао $ABCD$ је Сакеријев с основицом AB и противосновицом CD ако су углови $\angle BAD$ и $\angle ABC$ прави и важи $AD \cong BC$.

Дефиниција: Ламбертов четвороугао је онај четвороугао који има 3 права угла. Ивице Ламбертовог четвороугла на којима су оба налегла угла права зову се основним ивицама Ламбертовог четвороугла.

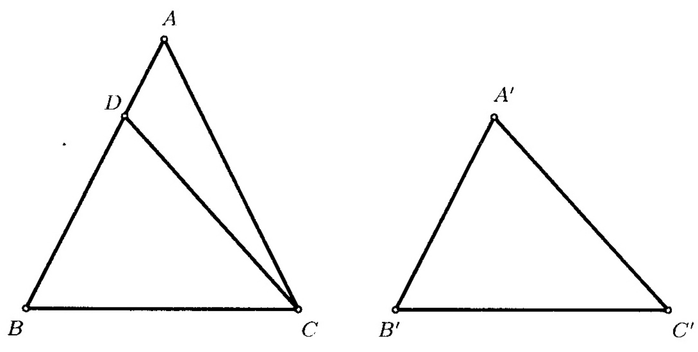


Другачије речено, $ABCD$ је Ламбертов четвороугао с основним ивицама AB и BC ако су углови код темена A, B и C прави.

У апсолутној геометрији доказано је 5 ставова о подударности троуглова. Прва четири су нам добро познати ставови СУС, УСУ, ССС и ССУ, а пети став је:

Два троугла су подударна ако и само ако су једна ивица, на њој налегли угао и њој наспрамни угао једног троугла подударни одговарајућој ивици и угловима другог троугла.

Доказ: Претпоставимо да су ABC и $A'B'C'$ два троугла којима је $BC \cong B'C'$, $\angle A \cong \angle A'$ и $\angle B \cong \angle B'$. Ако претпоставимо да ивице AB и $A'B'$ нису подударне већ да је једна од њих већа од друге, нпр. $AB > A'B'$, онда на дужи AB постоји тачка D таква да је $DB \cong A'B'$.



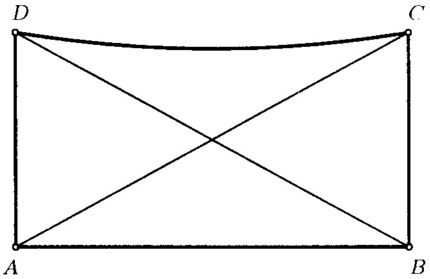
Тада су, на основу првог става, троуглови DBC и $A'B'C'$ међусобно подударни па је $\angle BDC \cong \angle B'A'C'$, а како је $\angle B'A'C' \cong \angle BAC$, било би $\angle BDC \cong \angle BAC$, што је немогуће на основу теореме да је спољашњи угао троугла већи од било ког унутрашњег несуседног угла. Према томе, $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

Из ових ставова о подударности троуглова изводе се 2 битне теореме о Сакеријевим четвороугловима.

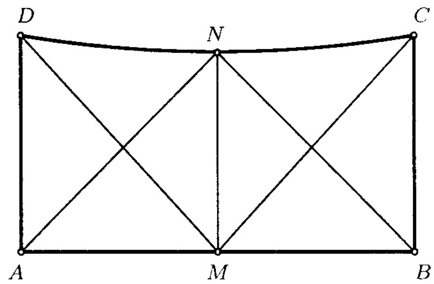
1. Углови на противосновици Сакеријевог четвороугла су подударни.
2. Ако су M и N редом средишта основице AB и противосновице CD Сакеријевог четвороугла $ABCD$, тада су $AMND$ и $BMNC$ Ламбертови четвороуглови.

Доказ:

1. Нека је $ABCD$ Сакеријев четвороугао с основицом AB. Троуглови DAB и CBA имају подударне ивице DA и CB и углове $\angle DAB$ и $\angle CBA$ и заједничку ивицу AB па су по ставу СУС подударни, из чега следи $\angle ADB \cong \angle BCA$ и $DB \cong CA$. Троуглови BDC и ACD имају међусобно подударне све 3 ивице, па су по ставу ССС подударни, одакле је $\angle BDC \cong \angle ACD$. Стога је и $\angle ADB + \angle BDC \cong \angle BCA + \angle ACD$, тј. $\angle ADC \cong \angle BCD$.



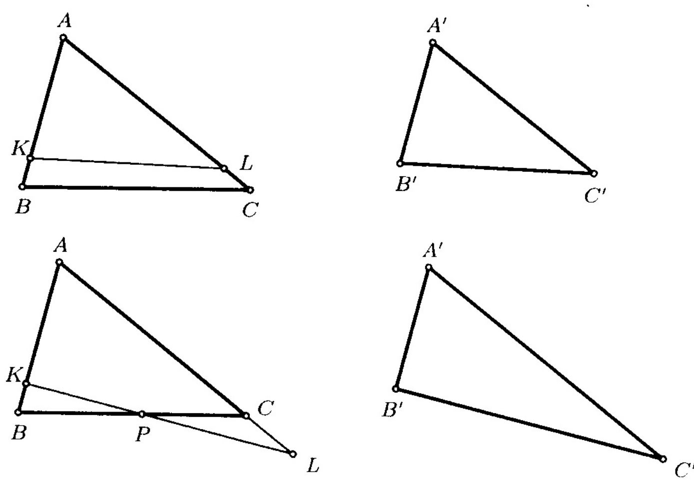
2. Троуглови AND и BNC имају подударне ивице AD и BC, подударне ивице ND и NC, а на основу претходно доказане теореме и подударне углове $\angle AND$ и $\angle BNC$, па су подударни по ставу СУС, одакле је $AN \cong BN$. Сада је по ставу ССС $\Delta AMN \cong \Delta BMN$, те је $\angle AMN \cong \angle BMN$, а како су ти углови напоредни, по дефиницији су прави. Слично је и $\angle MND \cong \angle MNC$, и они су такође напоредни, стога и прави. Из овога су по дефиницији четвороуглови $AMND$ и $BMNC$ Ламбертови четвороуглови.



Из прве од ове две теореме се сада тривијално доказује да су у геометрији Лобачевског оба угла на противосновици Сакеријевог четвороугла оштра, јер би иначе збир углова у том четвороуглу био већи или једнак $360°$, што је у контрадикцији с последицама аксиоме Лобачевског.

У геометрији Лобачевског важи и шести став о подударности троуглова, који гласи: Два троугла су подударна ако и само ако су им подударни одговарајући углови.

Доказ: Претпоставимо да су углови код темена A, B, C троугла ΔABC подударни редом угловима код темена A', B', C' троугла $\Delta A'B'C'$, а да ивице AB и $A'B'$ нису међусобно подударне, већ да је једна од њих већа од друге, нпр. $AB > A'B'$. Тада између тачака A и B постоји тачка K таква да је $AK \cong A'B'$. Нека је L тачка полуправе AC таква да је $AL \cong A'C'$.



Тада је на основу првог става о подударности троуглова $\Delta AKL \cong \Delta A'B'C'$, па су углови код темена K и L троугла ΔAKL подударни угловима код темена B и C троугла ΔABC. Ако би тачке A и L биле с исте стране праве BC, онда би у четвороуглу $BCLK$ збир унутрашњих углова био $360°$, што је немогуће. Ако тачке A и L не би биле с исте стране праве BC, онда би дуж KL секла дуж BC у тачки P, па би у троуглу ΔBPK спољашњи угао код темена K био подударан унутрашњем углу код темена B, што је такође немогуће на основу горепоменуте теореме да је спољашњи угао већи од унутрашњег несуседног угла. Дакле, није $AB > A'B'$, а како је случај $AB < A'B'$ аналоган претходном случају, то мора бити $AB \cong A'B'$. На основу другог става о подударности троуглова су троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ подударни.

Из претходне теореме закључујемо да ако су два троугла слична, како су им тада углови подударни, онда су и подударна, Овим се доказује следећа, веома важна последица претходне теореме, а она гласи:

Теорема: У хиперболичкој геометрији свака сличност је подударност.

И поред тога, у хиперболичкој геометрији дефинише се хомотетија на исти начин као у еуклидској геометрији. Дакле:

Дефиниција: Ако је O произвољна тачка хиперболичке равни или простора и ако је k реалан број различит од нуле, тада је хомотетија те равни или тог простора са средиштем O и коефицијентом k трансформација $H_{O,k}$ која свакој тачки X те равни или тог простора додељује тачку X' праве OX такву да је $OX' = kOX, k \neq 0$, при чему су тачке X и X' с исте стране тачке O ако и само ако је k позитиван реалан број.

Међутим, у хиперболичкој геометрији хомотетија неће бити трансформација сличности.

Како је збир углова у троуглу у хиперболичкој геометрији мањи од $180°$, то важи следеће тврђење:

Теорема: Збир углова у било којем простом n-тоуглу мањи је од $(n-2)\cdot 180°$.

Доказ: Нека је n-тоугао $A_1A_2...A_n$ прост и, не умањујући општост, поделимо га на троуглове $A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, ..., A_1A_{n-1}A_n$, којих има $n-2$. Тада је збир углова у n-тоуглу $A_1A_2...A_n$ једнак суми збирова углова у овим троугловима, а како је збир углова у било ком троуглу мањи од $180°$, то је збир углова у n-тоуглу $A_1A_2...A_n$ мањи од $(n-2)\cdot 180°$.

Из ове теореме види се да је разлика броја $(n-2)\cdot 180°$ и збира углова у произвољном простом n-тоуглу $A_1A_2...A_n$ позитивна, па се уводи појам дефекта полигона.

Дефиниција: Дефект полигона $A_1A_2...A_n$ је број $\delta(A_1A_2...A_n)$ такав да је $\delta(A_1A_2..A_n)=(n-2)\cdot 180°-\sigma(A_1A_2...A_n)$, при чему је са $\sigma(A_1A_2...A_n)$ означен збир углова у n-тоуглу $A_1A_2...A_n$. Ако се са p обележи унутрашњост тог полигона, тада је дефект полигонске површи p, који се обележава са $\delta(p)$, дефект полигона $A_1A_2...A_n$.

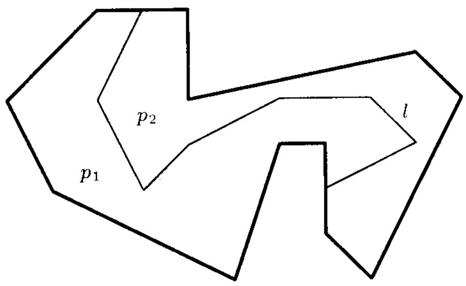
Дефект полигона је адитивна величина, тј. важи:

Теорема: Ако је полигонска površ p разложена неком полигонском линијом на две полигонске површи p_1 и p_2, тада је дефект површи p једнак збиру дефеката површи p_1 и p_2.

Доказ: Ако су m, m_1, m_2, редом, бројеви темена површи p, p_1, p_2, а n број темена полигонске линије l која површ p разлаже на површи p_1 и p_2 (изузимајући крајеве линије l), онда је $m_1+m_2=m+2n+2+r$ и $\sigma(p_1)+\sigma(p_2)=\sigma(p)+(2n+r)\cdot 180°$, где је $r=0$ кад су оба краја полигонске линије l истоветна с теменима површи p, $r=1$ кад је само један крај идентичан с теменом површи p, а $r=2$ кад није ниједан. Тада важи:

$$\delta(p)=(m-2)\cdot 180°-\sigma(p)=(m_1+m_2-2n-r-4)\cdot 180°-\sigma(p_1)-\sigma(p_2)+2n\cdot 180°+r\cdot 180°$$
$$=[(m_1-2)\cdot 180°-\sigma(p_1)]+[(m_2-2)\cdot 180°-\sigma(p_2)]=\delta(p_1)+\delta(p_2).$$

Према томе, дефект површи p једнак је збиру дефеката површи p_1 и p_2.



Задаци:

1. Доказати да су Ламбертови четвороуглови $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с оштрим угловима D и D' подударни ако и само ако је:

1° $AB\cong A'B', BC\cong B'C'$

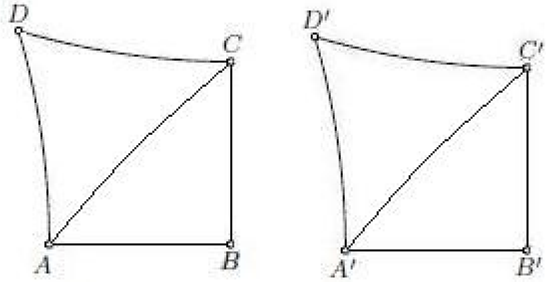
2° $AB\cong A'B', AD\cong A'D'$

3° $AD\cong A'D', BC\cong B'C'$

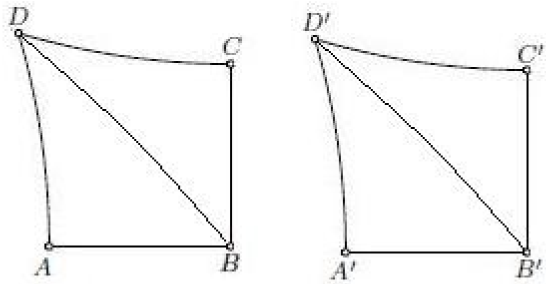
4° $AD\cong A'D', D\cong D'$

5° $AB\cong A'B', D\cong D'$

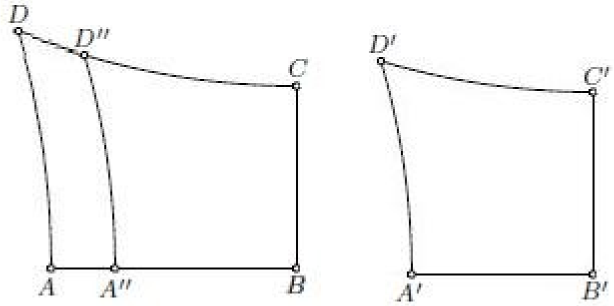
1° Из подударности ових страница и углова $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ следи по ставу СУС подударност троуглова ABC и $A'B'C'$, одакле следи $AC\cong A'C'$, $\angle BAC\cong\angle B'A'C'$ и $\angle BCA\cong\angle B'C'A'$. Како су углови $\angle BAD$ и $\angle B'A'D'$ подударни, као и углови $\angle BCD$ и $\angle B'C'D'$, то је $\angle CAD\cong\angle C'A'D'$ и $\angle ACD\cong\angle A'C'D'$, те је по ставу УСУ $\Delta ACD\cong\Delta A'C'D'$, одакле је сад $ABCD\cong A'B'C'D'$.



2° По ставу СУС је $\Delta ABD \cong \Delta A'B'D'$, па важи $AD \cong A'D'$ и $\angle ABD \cong \angle A'B'D'$. Како су углови $\angle ABC$ и $\angle A'B'C'$ подударни, јер су прави, то су и углови $\angle DBC$ и $\angle D'B'C'$ подударни. Сада по петом ставу подударности троуглова важи $\Delta DBC \cong \Delta D'B'C'$, па је и $ABCD \cong A'B'C'D'$.

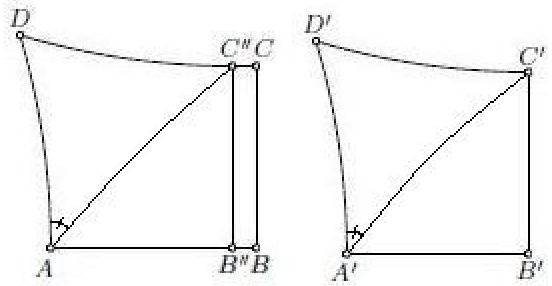


3° Претпоставимо да је, не умањујући општост, $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка A'' таква да је $A''B \cong A'B'$. Нека је D'' пресечна тачка праве CD и нормале на AB у тачки A''.



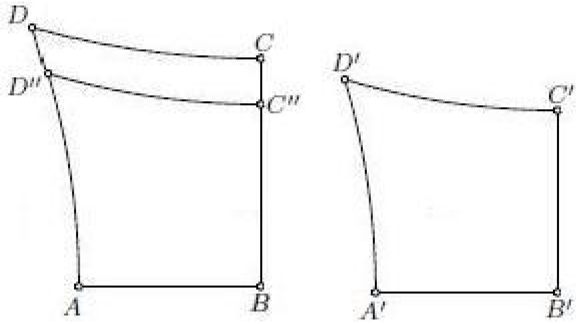
Тада је по ставу 1° овог задатка $A''BCD'' \cong A'B'C'D'$, па је и $A''D'' \cong AD$. Одатле је, по дефиницији, четвороугао $AA''D''D$ Сакеријев, те су по 4. еквиваленту аксиоме Лобачевског углови $\angle ADD''$ и $\angle A''D''D$ подударни и оштри. Стога је угао напоредан оштром углу $\angle A''D''D$, а то је угао $\angle A''D''C$, туп, што доводи до контрадикције, јер је $A''BCD''$ Ламбертов четвороугао, а његов четврти угао је оштар. Претпоставка да је $AB > A'B'$ није добра, а како се случај $AB < A'B'$ такође своди на контрадикцију, то је $AB \cong A'B'$, што по ставу 1° значи да је $ABCD \cong A'B'C'D'$.

4° Претпоставимо да је, не умањујући општост, $CD > C'D'$. Тада на основу неједнакости троугла на дужи CD постоји тачка C'' таква да је $\angle DAC'' \cong \angle D'A'C'$.



Сада је на основу става УСУ $\Delta DAC'' \cong \Delta D'A'C'$, одакле следи $AC'' \cong A'C'$ и $\angle DC''A \cong \angle D'C'A'$. Како су углови $\angle DAB$ и $\angle D'A'B'$ подударни, то су и углови $\angle C''AB$ и $\angle C'A'B'$ подударни. Нека је сад B'' пресечна тачка нормале на CD у C'' и AB. Како су сада подударни и углови $\angle DC''B''$ и $\angle D'C'B'$, то морају и углови $\angle AC''B''$ и $\angle A'C'B'$ бити подударни. Сад је по ставу УСУ $\Delta AC''B'' \cong \Delta A'C'B'$, па је $\angle AB''C'' \cong \angle A'B'C' = 90°$. Из тога следи $\angle BB''C'' = 90°$ и $\angle B''C''C = 90°$, па је збир углова у четвороуглу $B''BCC''$ једнак $360°$, што је немогуће. Претпоставка није добра, па је $CD \cong C'D'$, одакле следи $ABCD \cong A'B'C'D'$.

5° Претпоставимо да је, не умањујући општост, $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка C'' таква да $BC'' \cong B'C'$. Нека је D'' пресечна тачка нормале на BC у тачки C'' и дужи AD.



Тада је по ставу 1° $ABC''D'' \cong A'B'C'D'$, па је $\angle C''D''A \cong \angle C'D'A' \cong \angle CDA$. Према томе, $\angle C''D''D = 180° - \angle C''D''A = 180° - \angle CDA$, па је $\sigma(D''C''CD) = 90° + 90° +$
$+ \angle CDA + 180° - \angle CDA = 360°$ што је немогуће. Претпоставка није добра, па је $BC \cong B'C'$, одакле је по ставу 1° овог задатка $ABC''D'' \cong A'B'C'D'$.

2. Доказати да су Сакеријеви четвороуглови $ABCD$ и $A'B'C'D'$ с основицама AB и $A'B'$ подударни ако и само ако је:

1° $AB \cong A'B', BC \cong B'C'$

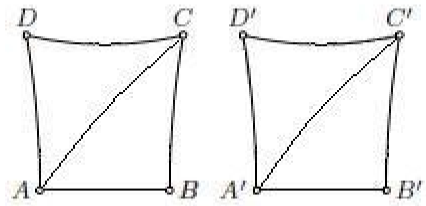
2° $CD \cong C'D', BC \cong B'C'$

3° $AB \cong A'B', C \cong C'$

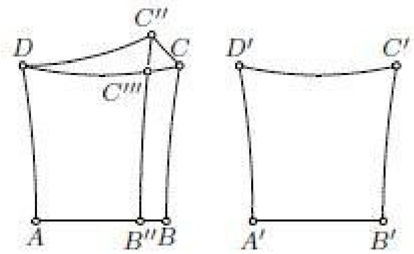
4° $BC \cong B'C', C \cong C'$

5° $CD \cong C'D', C \cong C'$

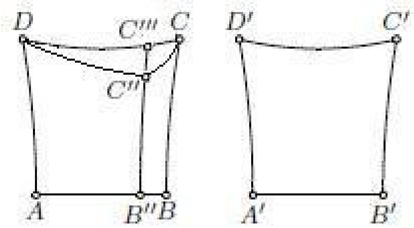
1° По ставу СУС, троуглови ΔABC и $\Delta A'B'C'$ су подударни, одакле следи $AC \cong A'C'$ и $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$. По дефиницији Сакеријевог четвороугла, $AD \cong A'D'$ и $90° - \angle BAC = \angle CAD \cong \angle C'A'D' = 90° - \angle B'A'C'$, па је по ставу СУС $\Delta CAD \cong \Delta C'A'D'$, одакле је $CD \cong C'D'$ и $\angle ADC \cong \angle A'D'C'$. По теореми 1 о Сакеријевим четвороуглима је $\angle ADC \cong \angle BCD$ и $\angle A'D'C' \cong \angle B'C'D'$, па је из претходног $\angle BCD \cong \angle B'C'D'$. Сада су сви углови и странице четвороуглова $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подударни, па су и четвороуглови подударни.



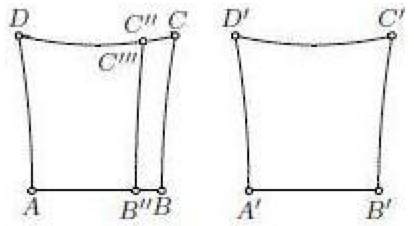
$2°$ Нека је, не умањујући општост, $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка B'' таква да је $AB'' \cong A'B'$. Нека је C'' тачка на правој управној на AB у тачки B'' таква да $B''C'' \cong B'C'$. Тада је, према тврђењу $1°$, $AB''C''D \cong A'B'C'D'$, па из $C''D \cong C'D'$ важи и $C''D \cong CD$. Нека је и C''' пресечна тачка правих $B''C''$ и CD. Тада постоје 3 случаја:
i)



Ако је $\beta(B'', C''', C'')$, онда је $\angle DC''C > \angle B''C''C$ и $\angle C''CB > \angle C''CD$, па како је по теореми 1 о Сакеријевим четвороугловима $\angle B''C''C \cong \angle C''CB$ (четвороугао $B''BCC''$ је Сакеријев), то је $\angle DC''C > \angle C''CD$. С друге стране, троугао $\Delta DC''C$ је једнакокрак, те важи $\angle DC''C \cong \angle C''CD$, што је у контрадикцији с условом $\angle B''C''C \cong \angle C''CB$.
ii)

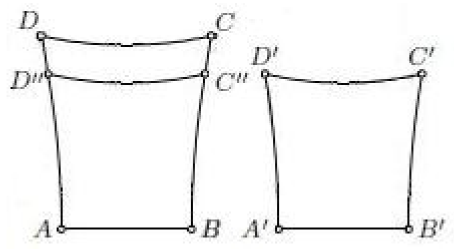


Ако је $\beta(B'', C'', C''')$, тада је $\angle DC''B'' + \angle DC''C + \angle CC''B'' = 360°$, јер је C'' тачка унутар конвексног четвороугла $ABCD$. С друге стране, $\angle DC''C < 180°$, јер је то угао троугла $\Delta DC''C$, $\angle DC''B < 90°$ и $\angle CC''B'' < 90°$, јер су то углови Сакеријевих четвороуглова $AB''C''D$ и $B''BCC''$. Одавде је
$\angle DC''B'' + \angle DC''C + \angle CC''B'' < 90° + 180° + 90° = 360°$ што је контрадикција.
iii)



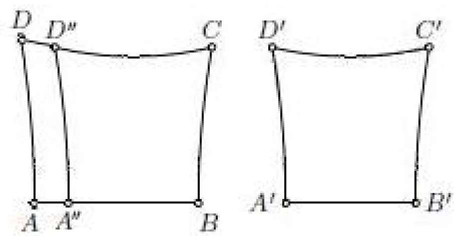
Ако је $C''' = C''$, тада из услова $C''D \cong C'D'$ следи $C = C''$, те из тачке C постоје 2 праве управне на правој AB, што је такође контрадикција.
Према томе, претпоставка да је $AB > A'B'$ је погрешна, па како се случај $AB < A'B'$ слично оповргава, мора бити $AB \cong A'B'$, па је на основу тврђења $1°$ $ABCD \cong A'B'C'D'$.

$3°$ Нека је, не умањујући општост, $BC > B'C'$. Тада је и $AD > A'D'$. На правој BC постоји тачка C'' таква да је $BC'' \cong B'C'$ и на правој AD постоји тачка D'' таква да је $AD'' \cong A'D'$.



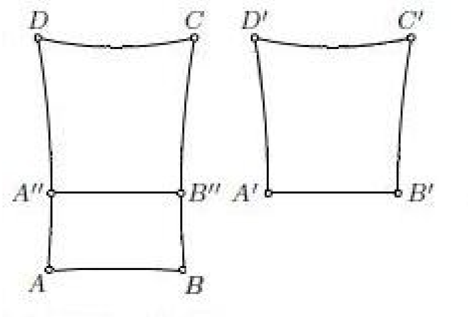
Тада је четвороугао $ABC''D''$ Сакеријев и по тврђењу $1°$ подударан с $A'B'C'D'$. Такође, важи и $\angle BC''D'' \cong \angle AD''C'' \cong \angle A'D'C' \cong \angle B'C'D' \cong \angle BCD \cong \angle ADC$, па је $\angle D''C''C \cong \angle C''D''D = 180° - \angle BC''D'' = 180° - \angle BCD$ и збир углова у четвороуглу $D''C''CD$ једнак $2 \cdot (180° - \angle BCD) + 2 \cdot \angle BCD = 360°$, што је немогуће. Према томе, претпоставка је погрешна, тј. $BC \cong B'C'$, одакле је и $ABCD \cong A'B'C'D'$.

$4°$ Нека је, не умањујући општост, $AB > A'B'$. Тада на дужи AB постоји тачка A'' таква да је $A''B \cong A'B'$. Нека је D'' тачка на правој управној на AB у тачки A'' таква да је $A''D'' \cong BC$. Тада је четвороугао $A''BCD''$ Сакеријев и према тврђењу $1°$ је $A''BCD'' \cong A'B'C'D'$.



Одавде следи да је и $\angle BCD'' \cong \angle B'C'D' \cong \angle BCD$, те је $D'' \in CD$. Међутим, тада из $\angle A''D''C \cong \angle BCD$ и $\angle A''D''D \cong \angle ADD''$, као и из $\angle BCD \cong \angle ADD''$, следи $\angle A''D''C \cong A''D''D$, а како су они напоредни, то је њихов збир $180°$, тј. сваки од њих је по $90°$, што је у контрадикцији с теоремом да су углови на противосновици Сакеријевог четвороугла оштри. Према томе, претпоставка није добра, тј. $AB \cong A'B'$, одакле по тврђењу $1°$ важи $ABCD \cong A'B'C'D'$.

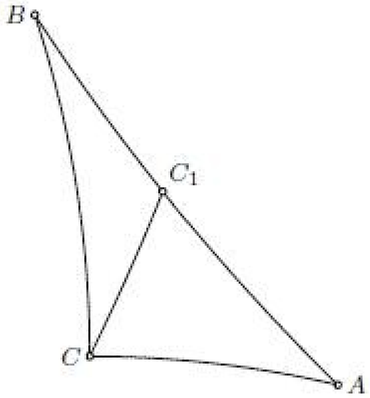
$5°$ Нека је, не умањујући општост, $BC > B'C'$. Тада на дужи BC постоји тачка B'' таква да је $B''C$. Како је четвороугао $ABCD$ Сакеријев, то је $AD \cong BC$, па и на дужи AD постоји тачка A'' различита од A таква да је $A''D \cong A'D'$.



Како је $DC \cong D'C'$, $\angle DCB \cong \angle D'C'B'$ и $CB'' \cong C'B'$, по ставу СУС је $\Delta DCB'' \cong \Delta D'C'B'$, одакле је $DB'' \cong D'B'$ и $\angle CDB'' \cong \angle C'D'B'$. Како су углови $\angle A''DC$ и $\angle A'D'C'$ подударни, то су подударни и углови $\angle A''DB''$ и $\angle A'D'B'$. Одавде следи подударност четвороуглова $A''B''CD$ и $A'B'C'D'$, па је четвороугао $A''B''CD$ Сакеријев. Сада је $\angle DA''B'' = 90°$ и $\angle A''B''C = 90°$, па је и $\angle AA''B \cong \angle BB''A = 90°$ због напоредности углова. Из овога је збир углова у четвороуглу $ABB''A''$ једнак $4 \cdot 90° = 360°$, што је немогуће. Према томе, претпоставка није добра, те је $BC \cong B'C'$ и према тврђењу 4° важи $ABCD \cong A'B'C'D'$.

3. Доказати да је дуж одређена средиштем хипотенузе и теменом правог угла правоуглог троугла хиперболичке равни мања од половине хипотенузе.

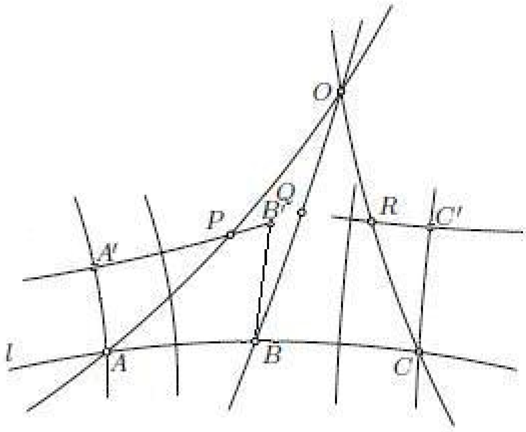
Нека је ΔABC правоугли троугао с правим углом код темена C и нека је C_1 средиште хипотенузе AB.



Претпоставимо супротно тврђењу задатка, тј. нека је $CC_1 \geq \frac{AB}{2}$. Одавде је $CC_1 \geq C_1A$ и $CC_1 \geq C_1B$, па је због неједнакости троугла $\angle CAC_1 \geq \angle C_1CA$ и $\angle CBC_1 \geq \angle C_1CB$. Сада је збир углова у троуглу ΔABC
$\sigma = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA \geq \angle C_1CA + \angle C_1CB + \angle BCA = \angle BCA + \angle BCA = 2 \cdot 90° = 180°$,
што је немогуће. Према томе, претпоставка није добра, тј. $CC_1 < \frac{AB}{2}$.

4. Ако су A, B и C три разне тачке неке праве l, а O тачка изван те праве, доказати да средишта дужи OA, OB и OC не припадају једној правој.

Нека је, не умањујући општост, $\beta(A, B, C)$ и нека су P, Q и R редом средишта дужи OA, OB и OC. Претпоставимо супротно, тј. да су тачке P, Q и R колинеарне. Нека су A', B' и C' редом подножја нормала из A, B и C на правој p која садржи тачке P, Q и R.



Тада је $\beta(A', B', C')$ и четвотоуглови $A'B'BA$ и $B'C'CA$ су Сакеријеви. Према теореми 2 о Сакеријевим четвороугловима, дуж која спаја средишта дужи $A'B'$ и AB дели четвороугао $A'B'BA$ на 2 Ламбертова четвороугла, па је према томе нормална и на $A'B'$ и на AB. Слично је и дуж која спаја средишта дужи BC и $B'C'$ нормална и на $B'C'$ и на BC. Другим речима, те 2 дужи нормалне су на праве l и p и са њима граде четвороугао с 4 права угла, што је немогуће. Према томе, претпоставка није добра, тј. тачке P, Q и R нису колинеарне.

Из ових задатака можемо извући неколико битних закључака. Прво, како су и Ламбертови и Сакеријеви четвороуглови правоугаоници у еуклидској геометрији, једини услов њихове подударности у еуклидској геометрији је подударност по једне од суседних ивица, док се у хиперболичкој геометрији доказује чак 5 различитих ставова подударности Ламбертових, односно Сакеријевих четвороуглова. Друго, центар описаног круга еуклидског правоуглог троугла је у средишту хипотенузе, док у геометрији Лобачевског, ако постоји, се ту не налази. И треће, у геометрији Лобачевског из услова $AB \parallel l$ и $BC \parallel l$ не следи колинеарност тачака A, B и C као што је то случај у еуклидској геометрији. Према томе, иако исте у четири групе аксиома, а различите само у једној, ове две геометрије имају веома различите особине простих геометријских облика као што је четвороугао, па чак и троугао.

МОДЕЛ ХИПЕРБОЛИЧКЕ ГЕОМЕТРИЈЕ

Најпознатији модел хиперболичке геометрије дао је француски математичар Анри Поенкаре (1854-1912), који се по њему зове Поенкареов диск модел. Поенкареов диск модел нам указује на то како изгледају основни геометријски облици, као што су права, троугао, четвороугао итд. Помоћу њега можемо боље разумети основне ставове који важе у хиперболичкој геометрији.

Нека је задат произвољан круг еуклидске равни. Унутрашњост тог круга зовемо *h*-равни, а сваку тачку *h*-равни зовемо *h*-тачком. Сам круг називамо апсолутом. Ознака *h* означава да то представља тај објекат у хиперболичкој геометрији, док објекти без те ознаке означавају те објекте у еуклидској геометрији. Пресек произвољног круга или праве управне на апсолути и *h*-равни зваћемо *h*-правом. Пресечне тачке тог круга или праве и апсолуте зову се крајеви те *h*-праве. Сваки лук произвољног круга или дуж произвољне праве управне на апсолуту чији крајеви припадају *h*-равни зовемо *h*-дужи, а кружни лук или дуж чији је један крај на апсолути, а други у *h*-равни зовемо *h*-

полуправом. Први од тих крајева зовемо крајем, а други теменом h-полуправе. Очигледно је да h-права разлаже h-раван па две h-полуравни и ту h-праву зовемо рубом те h-полуравни. Две h-полуправе које имају заједничко теме деле h-раван на два h-угла и те h-полуправе зову се краци тог h-угла.

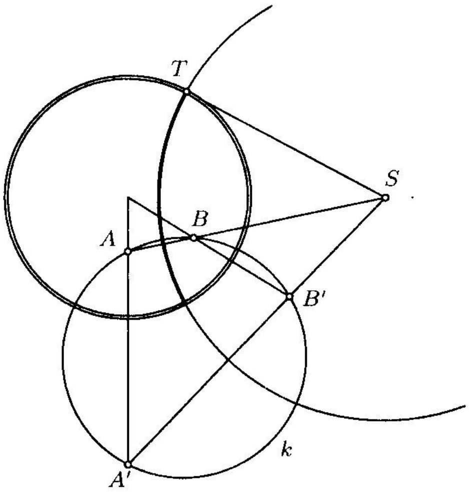
Ако су A, B и C три произвољне h-тачке које не припадају једној h-правој, тада скуп који се састоји од h-дужи AB, BC и CA зовемо h-троуглом.Углови тог h-троугла су h-углови $\angle CAB$, $\angle ABC$ и $\angle BCA$. Појмови h-полигонске линије, h-полигона, угла h-полигона, h-полигонске линије, површи итд. уводе се на аналоган начин као и у апсолутној геометрији.

Инверзијом у односу на круг k управан на апсолути или рефлексијом у односу на праву k управну на апсолути (која стога садржи центар апсолуте) се h-раван пресликава на себе, па се h-рефлексијом назива пресликавање том инверзијом или рефлексијом h-равни на саму себе. Осом те h-рефлексије зовемо h-праву која припада кругу (правој) k.

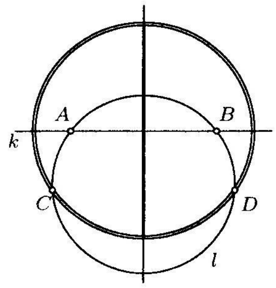
Докажимо сада неколико теорема битних за увођење појма h-подударности.

Теорема: За две разне h-тачке A и B постоји јединствена h-рефлексија којом се те две тачке пресликавају једна на другу.

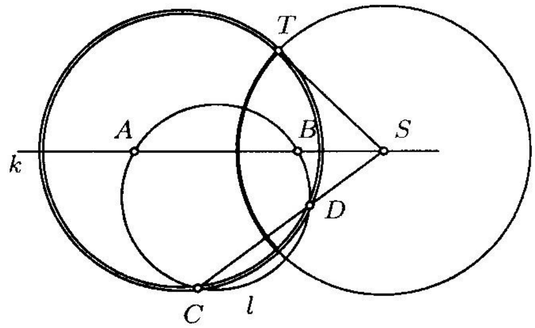
Доказ: Ако тачке A и B нису на пречнику апсолуте, нека су A' и B' слике тачака A и B у инверзији и односу на апсолуту. Како је четвороугао $ABB'A'$ тетиван, постоји круг k који садржи тачке A, B, A' и B' и његов пресек с h-равни је h-права која садржи тачке A и B. Ако су праве AB и $A'B'$ паралелне, h-права која припада медијатриси дужи AB представља осу h-рефлексије којом се тачке A и B сликају једна у другу. Ако се праве AB и $A'B'$ секу, оса h-рефлексије којом се тачке A и B сликају једна у другу биће h-права на кругу који је управан на апсолути и кругу k. Центар тог круга биће пресечна тачка праве AB и праве која садржи пресечне тачке апсолуте и круга k, а полупречник тог круга биће тангентна дуж из центра на апсолуту.



Ако су тачке A и B на пречнику апсолуте, тада постоји круг l који садржи тачке A и B и сече апсолуту у тачкама C и D. Ако су праве AB и CD паралелне, оса h-рефлексије којом се тачке A и B сликају једна у другу биће h-права на пречнику апсолуте који је нормалан на AB.



Ако се праве AB и CD секу у некој тачки S, тада ће оса h-рефлексије којом се тачке A и B сликају једна у другу бити на кругу с центром у S и полупречником једнаким тангентној дужи из S на апсолути.



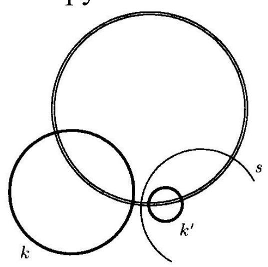
У сваком од наведених случајева, јединственост тражене h-рефлексије се доказује непосредно.

Овим доказом показане су и две конструкције. Прва од њих је конструкција h-праве која пролази кроз две задате h-тачке A и B, а друга је конструкција медијатрисе произвољне h-дужи AB.

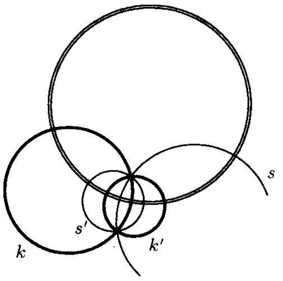
Следећа теорема је потребна за показивање конструкције бисектрисе произвољног h-угла.

Теорема: Ако су p и q две h-праве које се секу, тада постоје тачно две h-рефлексије којима се те две h-праве пресликавају једна на другу, а ако су дисјунктне, постоји јединствена h-рефлексија којом се оне пресликавају једна на другу.

Доказ: Нека су k и k' кругови који садрже задате h-праве p и q. Ако су p и q дисјунктне, тада су и кругови k и k' дисјунктни или се додирују у некој тачки која припада апсолути. Стога постоји јединствена инверзија којој се ти кругови пресликавају један на други. Круг те инверзије мора бити управан на апсолути. Према томе, постоји јединствена h-рефлексија којом се h-праве p и q пресликавају једна на другу, а њена оса припада кругу s с центром у тачки која представља пресек заједничких спољашњих тангенти на кругове k и k'.



Ако се, међутим, праве p и q секу, постоје тачно две инверзије којима се кругови k и k' сликају један на други и самим тим постоје две h-рефлексије којима се h-праве p и q пресликавају једна на другу. Оса једна од тих h-рефлексија припада кругу s с центром у тачки пресека заједничких тангенти кругова k и k' који садржи пресечне тачке кругова k и k', а оса друге h-рефлексије је круг s' који садржи пресечне тачке кругова k и k' и управан је на кругу s.



Из ове теореме тривијално важи следећа теорема:

Теорема: Постоји јединствена *h*-рефлексија којом се две *h*-полуправе са заједничким теменом сликају једна на другу.

Овом и претходном теоремом показана је конструкција бисектрисе произвољног *h*-угла.

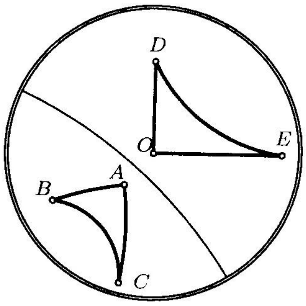
Уведимо још неке основне појмове. Ако су *A*, *B* и *C* три разне колинеарне *h*-тачке и *h*-тачка *B* припада *h*-дужи *AC*, тада је *h*-тачка *B* у релацији „између“ с *h*-тачкама *A* и *C* и пишемо $\beta_h(A,B,C)$. Ако је пар *h*-тачака (A,B) *h*-подударан пару *h*-тачака (C,D), тада постоји коначан низ *h*-рефлексија чија композиција пресликава пар (A,B) на пар (C,D). Подударност тих парова *h*-тачака означавамо с $(A,B)\overset{h}{\cong}(C,D)$, а композицију тих *h*-рефлексија зовемо *h*-изометријом *h*-равни.

Да бисмо доказали да је представљени модел исправан модел хиперболичке равни, потребно је доказати да важе све аксиоме апсолутне геометрије и да важи аксиома Лобачевског.

Докажимо још једну теорему неопходну за доказивање исправности Поенкареовог диск модела као модела хиперболичке геометрије.

Теорема: Збир унутрашњих углова произвољног *h*-троугла мањи је од $180°$.

Доказ: Ако је *ABC* *h*-троугао и *O* центар апсолуте, тада према првој теореми из овог дела постоји јединствена *h*-рефлексија којом се *h*-тачка *A* пресликава у *h*-тачку *O*. Нека се том *h*-рефлексијом *h*-тачка *B* слика у *h*-тачку *D*, а *h*-тачка *C* слика у *h*-тачку *E*. Том рефлексијом се углови *h*-троугла *ABC* сликају у њима подударне углове *h*-троугла *ODE*, а *h*-дужи *AB* и *AC* се пресликавају на *h*-дужи *OD* и *OE* које припадају пречницима апсолуте.



Сада су *h*-углови $\angle ODE$ и $\angle OED$ мањи од еуклидских углова $\angle ODE$ и $\angle OED$, па је збир углова *h*-троугла *ODE* мањи од збира углова троугла ΔODE, који износи $180°$. Како је *h*-троугао *ABC* подударан *h*-троуглу *ODE*, то је збир његових углова мањи од $180°$.

Сада можемо приступити доказивању следеће теореме:

Теорема: *h*-раван је модел хиперболичке равни.

Доказ: Потребно је доказати да појмови *h*-тачке, *h*-праве, *h*-подударности и *h*-између задовољавају све аксиоме апсолутне геометрије, осим оних које се односе на простор, као што су четврта, пета, седма, осма и девета аксиома инциденције.

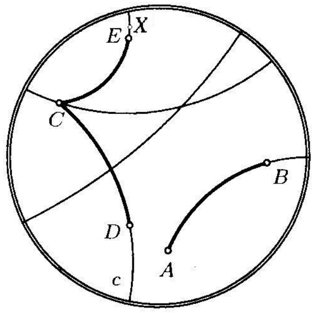
С обзиром на то да сваки круг садржи барем две тачке и постоји јединствени круг управан на апсолути који садржи две дате разне тачке, задовољене су прве три аксиоме инциденције, јер сада постоји најмање једна *h*-права која садржи две *h*-тачке, постоји тачно једна *h*-права која садржи две разне *h*-тачке и свака *h*-права садржи најмање две разне *h*-тачке. Како *h*-раван садржи бар три *h*-неколинеарне тачке, задовољена је и шеста аксиома инциденције.

Што се тиче првих пет аксиома распореда, непосредном провером се утврђује да оне важе. Остаје да се докаже још Пашова аксиома. Заиста, ако су *A*, *B* и *C* три *h*-

неколинеарне тачке и ако је l h-права која не садржи h-тачку A и сече h-праву BC у тачки P таквој да је $\beta_h(B,P,C)$, тада h-тачка A припада или оној h-полуравни с рубом l којој припада h-тачка B или оној h-полуравни с рубом l којој припада h-тачка C. У првом случају, h-права l сече h-праву AC у Q таквој да је $\beta_h(A,Q,C)$, а у другом случају у тачки R таквој да је $\beta_h(A,R,B)$.

Прва аксиома подударности важи непосредно на основу дефиниције h-подударности, а што се друге аксиоме тиче, довољно је узети h-рефлексију којом се A слика у B и B слика у A (таква h-рефлексија постоји и једниствена је), па је по дефиницији $(A,B)\overset{h}{\cong}(B,A)$. Трећа аксиома подударности такође важи, јер ако је $(A,B)\overset{h}{\cong}(C,D)$ и $(A,B)\overset{h}{\cong}(E,F)$, постоји h-изометрија I_1 која пресликава (A,B) у (C,D) и постоји h-изометрија I_2 која пресликава (A,B) у (E,F) и композиција $I_2 \circ I_1^{-1}$ је h-изометрија која прескикава пар h-тачака (C,D) у пар h-тачака (E,F), па важи $(C,D)\overset{h}{\cong}(E,F)$.

Нека су A и B две разне h-тачке и нека је CX h-полуправа с теменом у C. Како постоји h-рефлексија којом се h-тачка A слика у h-тачку C, том h-рефлексијом се h-тачка B слика у неку h-тачку E.



Такође, како постоји h-рефлексија којом се h-полуправа CE слика у h-полуправу CX, том h-рефлексијом се h-тачка E слика у неку h-тачку D на полуправој CX. Сада је $(C,E)\overset{h}{\cong}(A,B)$ и $(C,E)\overset{h}{\cong}(C,D)$, па на основу треће аксиоме подударности важи $(A,B)\overset{h}{\cong}(C,D)$.

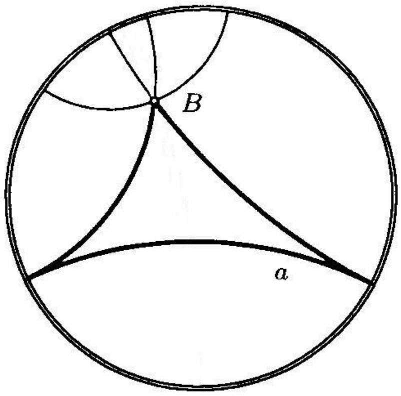
Нека су A и B две разне h-тачке и нека су A' и B' h-тачке руба неке h-полуравни π такве да је $(A,B)\overset{h}{\cong}(A',B')$. Тада постоји h-изометрија којом се пар h-тачака (A,B) слика у пар h-тачака (C,D). Ако је C нека h-тачка која не припада h-правој AB, тада се она том h-изометријом пресликава у h-тачку C' такву да је $(A,C)\overset{h}{\cong}(A',C')$ и $(B,C)\overset{h}{\cong}(B',C')$. У h-полуравни π таква h-тачка C' је јединствена јер h-изометрије чувају h-углове, па је тиме доказана шеста аксиома подударности.

Ради доказивања седме аксиоме, претпоставимо да су A, B, C и A', B', C' две тројке h-неколинеарних тачака и D и D' тачке h-полуправих BC и $B'C'$ такве да је $(A,B)\overset{h}{\cong}(A',B')$, $(B,C)\overset{h}{\cong}(B',C')$, $(C,A)\overset{h}{\cong}(C',A')$ и $(B,D)\overset{h}{\cong}(B',D')$. С обзиром на то да постоји јединствена h-изометрија која пресликава уређену тројку (A,B,C) у $(A,'B',C')$, том h-изометријом се тачка D слика у D', па је стога и $(A,D)\overset{h}{\cong}(A',D')$.

Остаје још четврта аксиома подударности. Нека су C и C' тачке h-дужи AB и $A'B'$ такве да је $(A,C)\overset{h}{\cong}(A',C')$ и $(C,B)\overset{h}{\cong}(C',B')$. С обзиром на то да постоји јединствена h-изометрија којом се уређени пар (A,C) слика на (A',C') и уређени пар (C,B) слика на (C',B'), том h-изометријом се уређени пар (A,B) слика на (A',B'), па је $(A,B)\overset{h}{\cong}(A',B')$.

Дедекиндова аксиома важи како за праве, тако и за кружне лукове и дужи, па стога важи за било коју h-праву h-равни. Тиме је доказано да h-раван испуњава све аксиоме апсолутне геометрије које се односе на раван, те је она модел апсолутне равни.

На основу претходне теореме, збир углова произвољног h-троугла мањи је од $180°$, па како је тај став еквивалентан аксиоми Лобачевског, важи и аксиома Лобачевског у h-равни. Стога је h-раван модел хиперболичке равни.



Ово је приказ аксиоме Лобачевског у Поенкареовом диск моделу.

Пример:

У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-тачке A и B. Одредити h-тачку C такву да је h-троугао ΔABC правилан.

За овај задатак прво нам је потребна конструкција тачке инверзне некој тачки X у односу на неки круг k с центром у O и полупречником r.

Конструише се права нормална на правој OX у тачки X. Нека је једна од пресечних тачака круга k и те праве тачка T. Сада се конструише тангента на k у тачки T. Пресечну тачку те тангенте и праве OX означимо с X'. Тражена тачка управо је тачка X'.

Доказ: Нека је ψ инверзија у односу на круг k с центром у O и полупречником r. Троуглови ΔOTX и $\Delta TX'O$ имају заједнички угао $\angle TOX$ ($\angle TOX'$) и подударне углове $\angle OXT$ и $\angle OTX'$ који су прави, те су они слични, па из тога следи $OT : OX' = OX : OT$, тј. $OX \cdot OX' = r^2$, па је по дефиницији тачка X' инверзна тачки X у односу на круг k.

Поред ове конструкције, потребне су конструкција h-медијатрисе h-дужи XO, где је O центар аплолуте, конструкција слике круга у инверзији у односу на неки круг, као и конструкција h-круга с центром у h-тачки X који садржи h-тачку Y.

Конструкција h-медијатрисе h-дужи XO, где је O центар апсолуте, а X произвољна тачка изводи се на следећи начин:

Конструише се (еуклидска) права нормална на правој OX у тачки X. Нека је једна од пресечних тачака апсолуте и те праве тачка T. Сада се конструише тангента на апсолуту у тачки T. Пресечну тачку те тангенте и праве OX означимо с O_x. Тражена h-

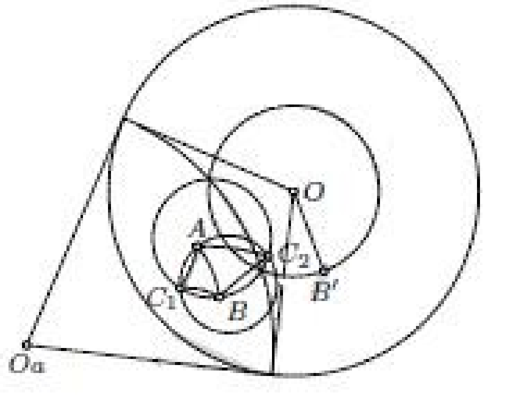
медијатриса је пресек унутрашњости апсолуте и круга с центром у O_x и полупречником O_xT.

Доказ: Како су тачке O_x, X и O колинеарне и важи $\beta(O_x, X, O)$, то је и $\angle X'O_xX \cong \angle X'O_xO$. С друге стране, углови $\angle O_xX'O$ и $\angle O_xXX'$ су прави, па важи $\Delta O_xXX' \sim \Delta O_xOX'$, одакле је $O_xO : O_xX' = O_xX' : O_xX$, тј. $O_xO \cdot O_xX = r^2$. Из овога и $\beta(O_x, X, O)$, на основу дефиниције инверзије, важи $\psi(X) = O$ и $\psi(O) = X$. У Поенкареовом диск моделу то значи да су тачке *X* и *O* *h*-симетричне у односу на *h*-праву која припада кругу инверзије ψ, па је та права тражена *h*-медијатриса.

Конструкција слике круга *k* у инверзији у односу на дати круг врши се тако што се одаберу три произвољне тачке на кругу *k*, а затим на описани начин нађу слике тих тачака у инверзији у односу на дати круг. Тражена слика круга *k* је или права која садржи слике тих тачака (то важи у случају да круг *k* садржи центар круга инверзије) или круг који садржи слике тих тачака. Напоменимо да се том инверзијом центар круга *k* не пресликава у центар његове слике.

На крају, конструкција *h*-круга с центром у *h*-тачки *X* који садржи *h*-тачку *Y* врши се тако што се конструише еуклидски круг с центром у *X* и полупречником *XY* ако је *X* центар апсолуте. Ако то није случај, онда se најпре конструише *h*-медијатриса *m* *h*-дужи *XO* на описани начин. Затим се конструише *h*-тачка Y' која је слика *h*-тачке *Y* у *h*-рефлексији с *h*-осом *m*. Потом се конструише еуклидски круг l' с центром у *O* и полупречником *OY*. На крају, тражени *h*-круг је круг *l* који је слика круга l' у *h*-рефлексији с *h*-осом *m*.

Доказ: Ако је тачка *X* идентична центру апсолуте, тада је тражени круг заиста еуклидски круг с центром у *X* и полупречником *XY*, јер се центар *h*-круга *X* у смислу модела поклапа с његовим еуклидским центром ако и само ако је *X* центар апсолуте. У другом случају, када *X* није идентична центру апсолуте, тачка Y' добијена том конструкцијом је заиста слика тачке *Y* у инверзији у односу на круг који садржи *h*-праву *m*. Како Y' припада кругу l', то њена слика *Y* мора припадати траженом кругу *l* који је слика круга l' у инверзији у односу на круг који садржи *h*-праву *m*. Како је *O* центар круга l', а *X* слика тачке *O* у посматраној инверзији, то је *X* центар траженог *h*-круга *l* у смислу модела. Не заборавимо да еуклидски центар круга *l* није тачка *X*. Овим је доказ завршен.



Тражена *h*-тачка *C* конструише се сада као пресечна тачка *h*-круга с центром у *A* који садржи *h*-тачку *B* и *h*-круга с центром у *B* који садржи тачку *A*. Те *h*-кругове конструишемо на начин описан у претходној конструкцији. Пресечне тачке тих *h*-кругова задовољавају услове задатка.

ЗНАЧАЈ ГЕОМЕТРИЈЕ ЛОБАЧЕВСКОГ

„Геометрија Лобачевског послужила је као основа за открића која су довела и до метода за прорачунавање унутар атомског језгра“, тврде руски академици Христијанович и Лаврентјев.

Сам Алберт Ајнштајн изградио је своју познату теорију релативности која се заснива на тесној и узајамној вези простора, времена и материје, ослањајући се при том на резултате и идеје Римана, које, у ствари, представљају даљи развој идеје Лобачевског.

Геометрија Лобачевског има велики значај у развитку релативистичке космологије, па самим тим и за рад Стивена Хокинга. Откриће квазара и посматрања њиховог светлосног спектра, донела су не само потврду ширења свемира и колапса звезда, већ и потврду геометрије Лобачевског.

Откриће нееуклидске геометрије спада у ред највећих открића у математици. Овим открићем, као и целокупним ставом математичара и филозофа математике, Лобачевски је отворио нове путеве у развитку математике који су уследили на аксиоматским заснивањима свих грана математике и уврстио се у ред генијалних стваралаца.

Поводом стогодишњице његовог рођења утемељена је Награда Лобачевског за дела из нееуклидске геометрије.

Николај Иванович Лобачевски (1752-1856)

„Нема ни једне гране математике, ма како да је апстрактна, која се једног дана не би могла применити на појаве стварног света“, рекао је Лобачевски.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Еуклидска и хиперболичка геометрија, Зоран Лучић, Београд, 1994.
[2] Геометрија за први разред Математичке гимназије, Милан Митровић, Срђан Огњановић, Михаило Вељковић, Љубинка Петковић, Ненад Лазаревић, Београд, 2003.
[3] Геометрија, http://sr.wikipedia.org/wiki/Геометрија
[4] Хиперболичка геометрија, http://sr.wikipedia.org/wiki/Хиперболичка_геометрија
[5] Математика, општа енциклопедија Ларус, Београд, 1973.
[6] Путеви развоја геометрије Лобачевског, http://alas.matf.bg.ac.rs/~zlucic/view_doc.php?id=578